

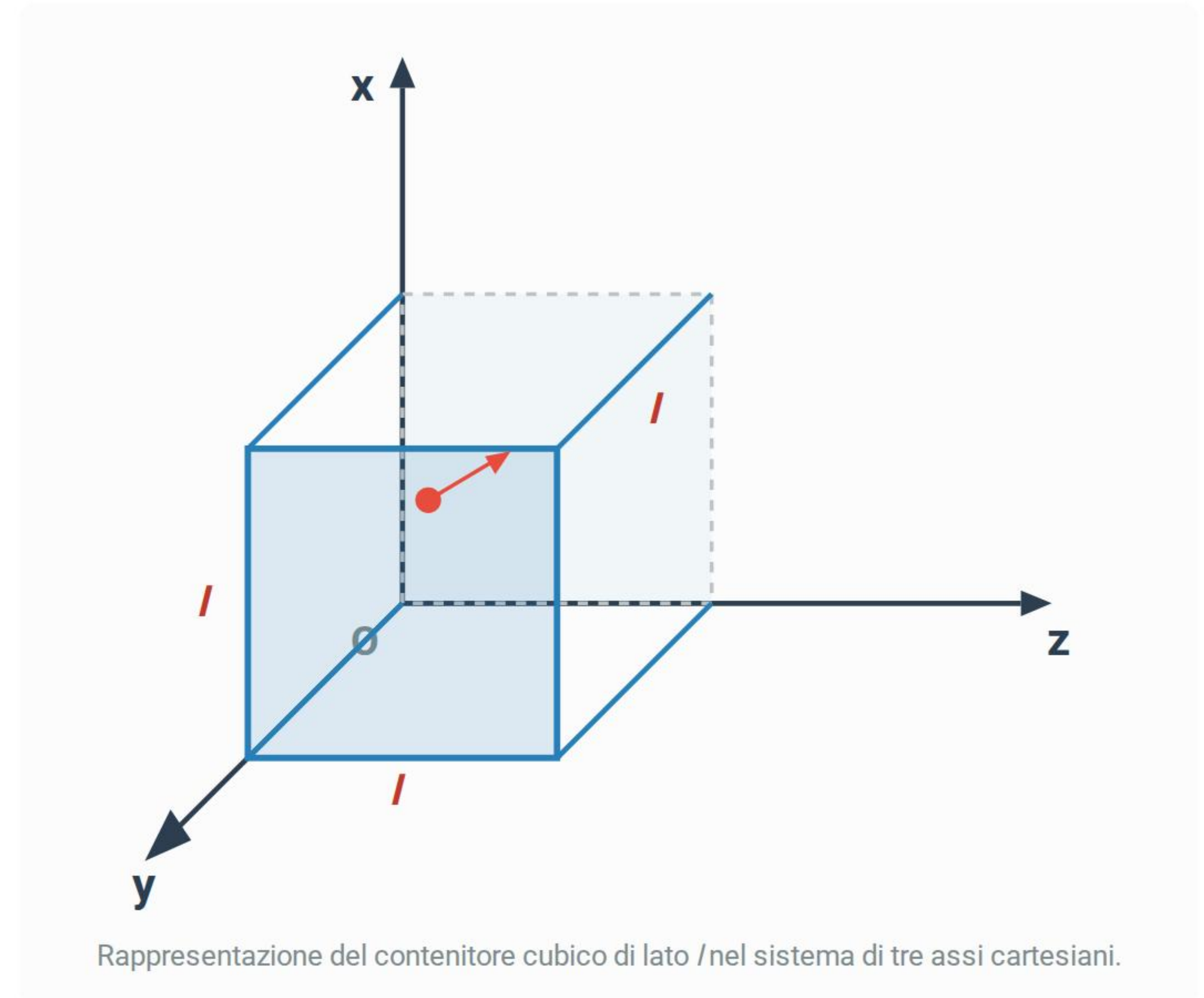
1. Modello Fisico e Ipotesi del Gas Perfetto

Definizione di Gas Perfetto (o Ideale): Un sistema fisico ideale costituito da un numero elevatissimo di molecole puntiformi che non interagiscono tra loro a distanza e che si muovono di moto caotico continuo, effettuando esclusivamente urti perfettamente elastici contro le pareti del recipiente.

- **Obiettivo:** Ricavare analiticamente l'equazione di stato dei gas perfetti a partire dalla meccanica molecolare.
- **Sistema di riferimento:** Consideriamo un cubo di spigolo l inserito in un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$.
- **Ipotesi 1 (Covolume nullo):** Molecole puntiformi con volume proprio trascurabile rispetto al volume totale del recipiente.
- **Ipotesi 2 (Assenza di forze):** Nessuna interazione a distanza fra le molecole fra un urto e l'altro.
- **Ipotesi 3 (Urti elastici):** Urti perfettamente conservativi contro le pareti e tempo d'urto trascurabile.
- **Ipotesi 4 (Isotropia):** Moto continuo e casuale senza alcuna direzione dello spazio privilegiata.

Obiettivo formale della dimostrazione:

$$PV = nRT$$



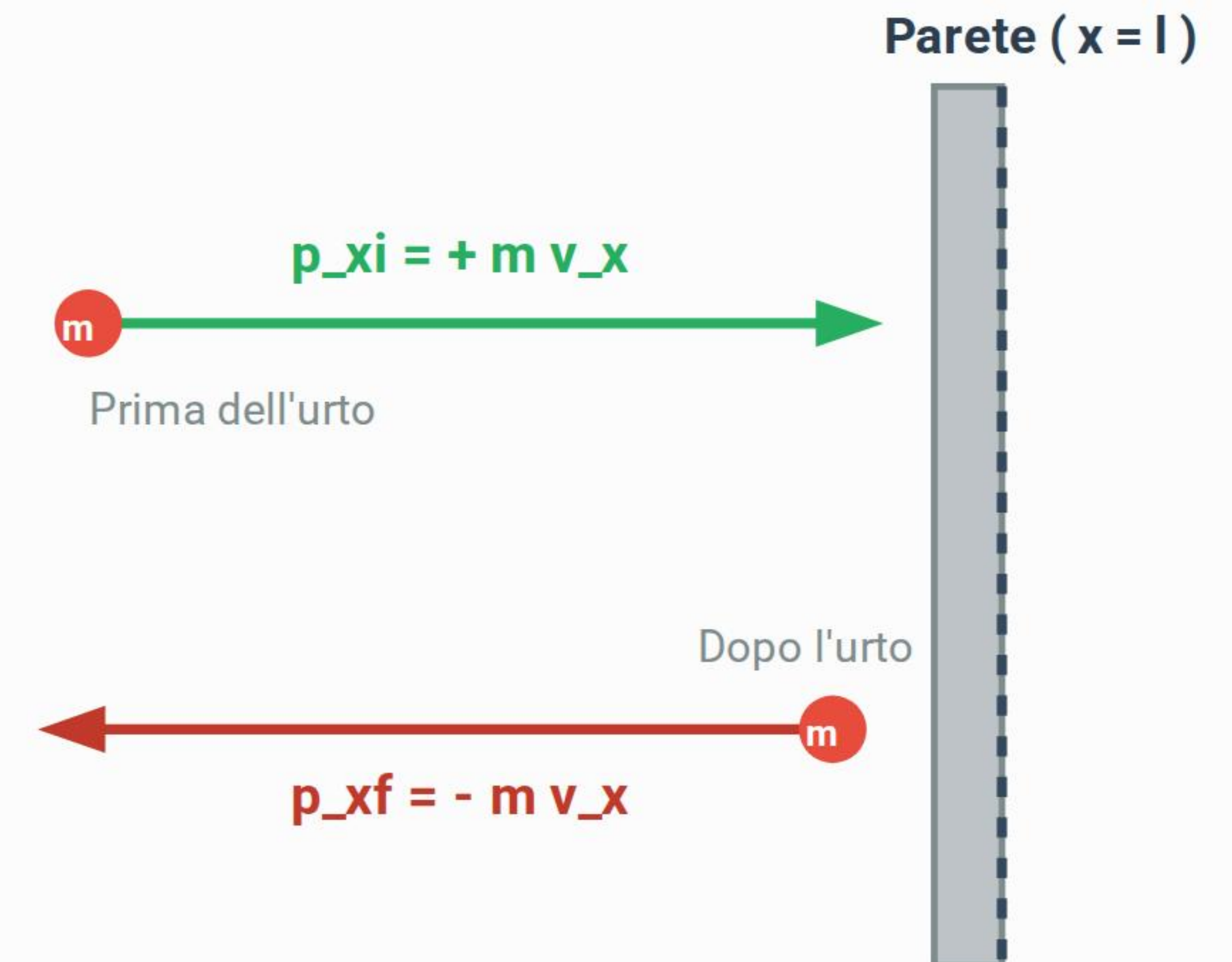
2. Componenti della Velocità e Urto della Singola Molecola

Principio di Equipartizione e Simmetria Spaziale: In un gas isotropo, il valore quadratico medio delle componenti della velocità è identico lungo tutte e tre le direzioni dello spazio: $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$. Durante l'urto con una parete ortogonale all'asse x, varia solo la componente della velocità perpendicolare ad essa.

- **Scomposizione del vettore velocità:** Per una singola molecola di massa m, si ha $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e modulo al quadrato $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.
- **Isotropia del moto:** Poiché non vi sono direzioni privilegiate, i valori medi quadratici soddisfano la relazione di uguaglianza spaziale.
- **Analisi dell'urto sulla parete perpendicolare all'asse x:** Si considera soltanto la componente v_x responsabile dell'impatto.
- **Quantità di moto iniziale (prima dell'urto):**
 $\vec{p}_{x,i} = m\vec{v}_x$
- **Quantità di moto finale (dopo l'urto elastico):** La molecola inverte la propria direzione mantenendo inalterato il modulo.
 $\vec{p}_{x,f} = -m\vec{v}_x$

Variazione vettoriale al rimbalzo:

$$p_{x,i} = mv_x \rightarrow p_{x,f} = -mv_x$$



Inversione del verso del vettore quantità di moto nell'urto elastico lungo x.

3. Variazione di Quantità di Moto, Forza e Pressione

Pressione Molecolare della Singola Particella: La pressione prodotta da una singola molecola su una parete è il rapporto tra la forza media dinamica (derivante dagli urti continui a distanza temporale Δt) e la superficie d'impatto $A = l^2$.

→ **Variazione della quantità di moto (ΔP):**

$$\Delta P = p_{x,i} - p_{x,f} = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$$

→ **Tempo tra due urti consecutivi (Δt):** La molecola percorre una distanza pari a $2l$ (andata e ritorno) a velocità costante v_x :

$$\Delta t = \frac{2l}{v_x}$$

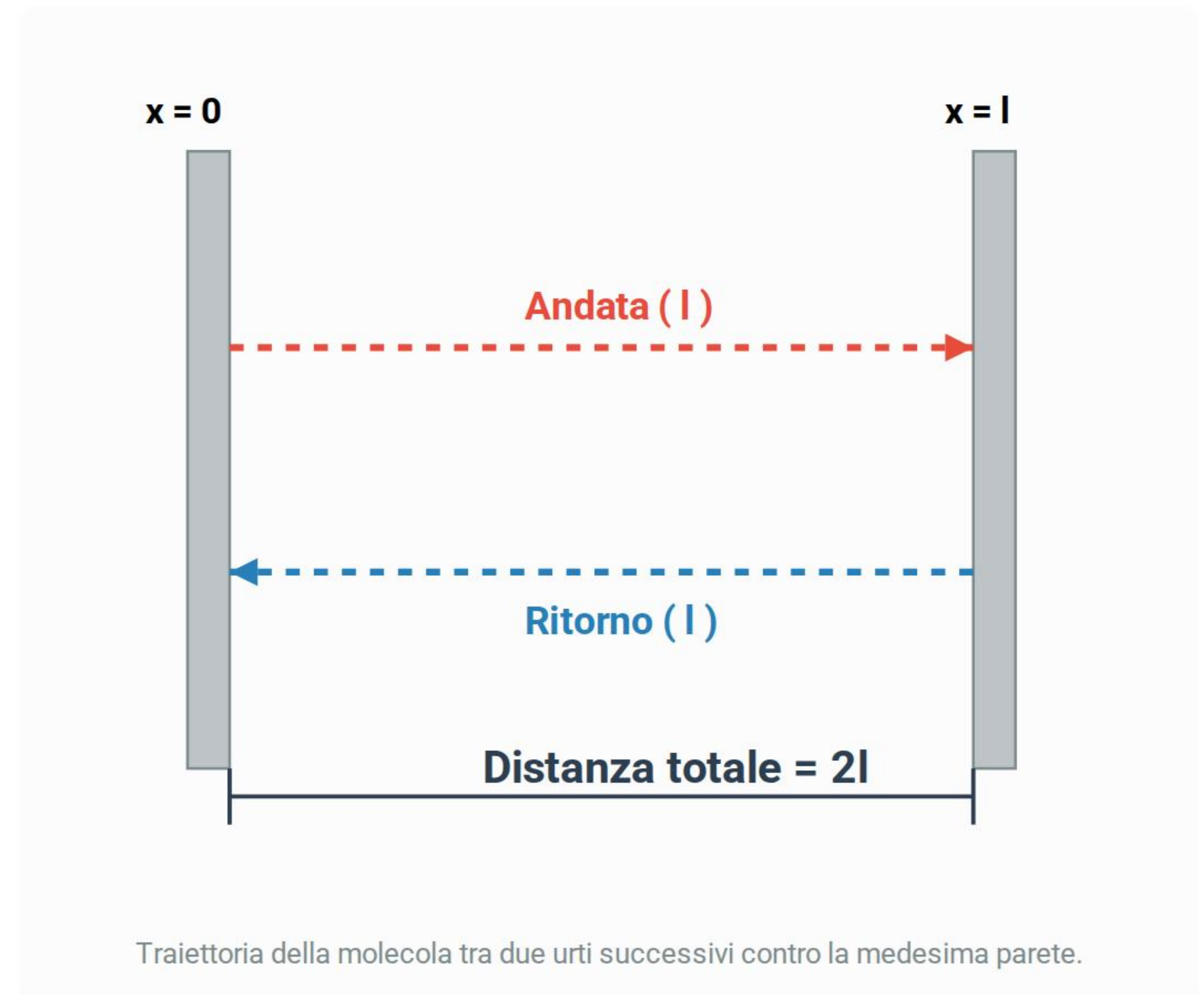
→ **Forza media esercitata (F):** Secondo il secondo principio della dinamica:

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\frac{2l}{v_x}} = \frac{mv_x^2}{l}$$

→ **Dalla forza alla pressione (P):** Sapendo che l'area della parete è $A = l^2$:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\frac{mv_x^2}{l}}{l^2} = \frac{mv_x^2}{l^3}$$

$$P = \frac{mv_x^2}{l^3}$$



4. Effetto Cumulativo di N Molecole e Volume del Recipiente

Pressione Macroscopica e Valore Quadratico Medio: La pressione totale esercitata da un gas è la somma statistica prodotta dalle N molecole contenute nel volume $V = l^3$, legata direttamente al valore quadratico medio delle componenti delle velocità $\langle v_x^2 \rangle$.

- **Relazione con il Volume:** Sapendo che il volume del cubo è $V = l^3$, la pressione prodotta da una singola molecola diventa:

$$P = \frac{mv_x^2}{V}$$

- **Media quadratica della componente x:** Per N molecole, il valore medio quadratico è definito come:

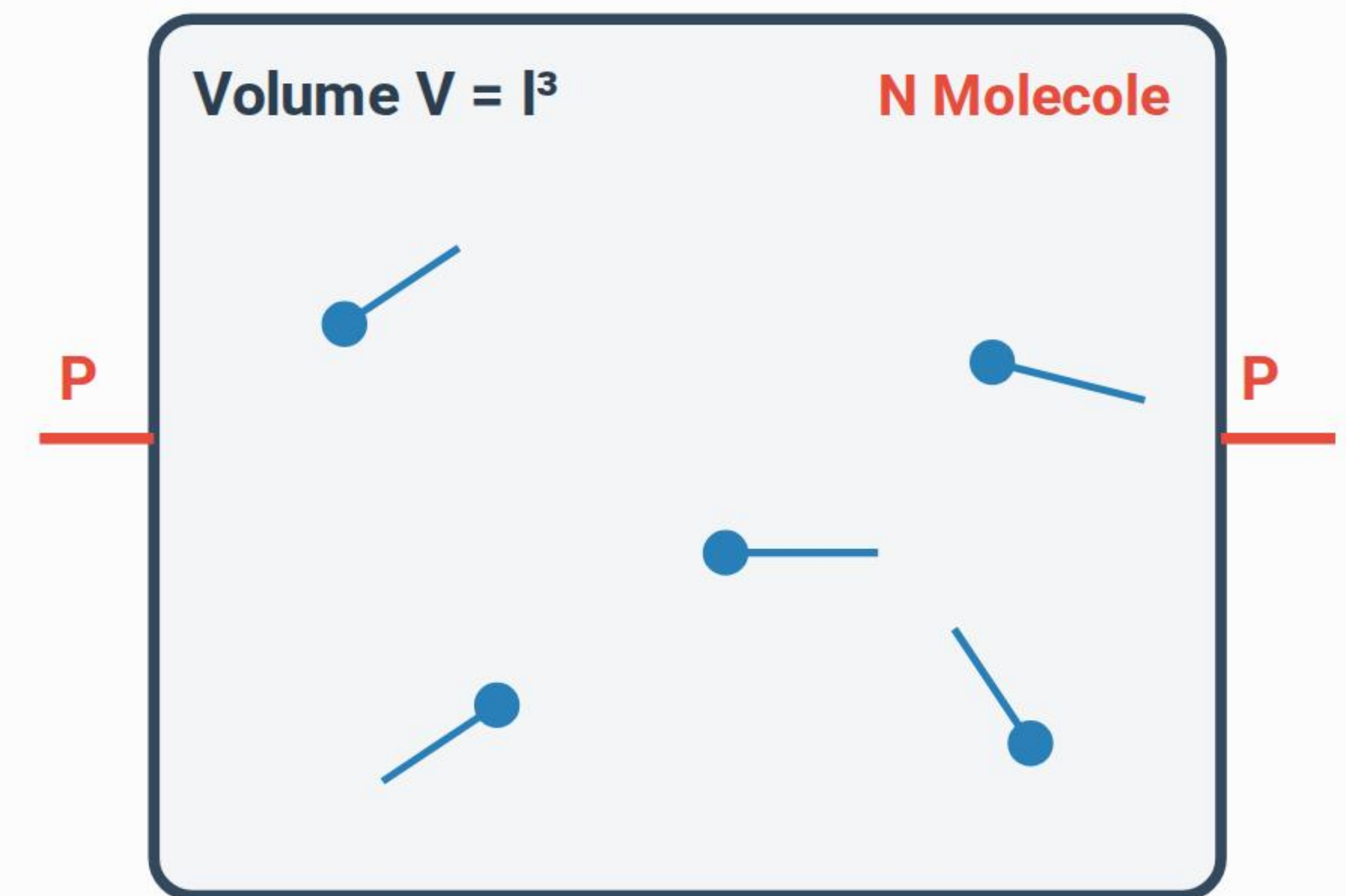
$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_{x,i}^2}{N} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2 = N \langle v_x^2 \rangle$$

- **Pressione totale dovuta a tutte le N molecole:**

$$P = \frac{mN \langle v_x^2 \rangle}{V}$$

- **Formulazione intermedia dell'Equazione di Stato:** Moltiplicando entrambi i membri per il volume V:

$$PV = Nm \langle v_x^2 \rangle$$



Il moto caotico delle N molecole genera una pressione uniforme P su tutte le pareti.

5. Isotropia del Mezzo, Temperatura ed Equazione di Stato Finale

Interpretazione Cinetica della Temperatura e Legge dei Gas Perfetti: La temperatura assoluta T è una misura diretta dell'energia cinetica media traslazionale molecolare ($\frac{3}{2}k_B T$). Sostituendo tale relazione fisica nell'equazione cumulativa si ricava la legge fondamentale macroscopica dei gas ideali.

→ **Isotropia ed Energia Cinetica Traslazionale:**

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$
$$\frac{1}{2}m \langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2}m \langle v_y^2 \rangle + \frac{1}{2}m \langle v_z^2 \rangle = \frac{3}{2}m \langle v_x^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

→ **Relazione fondamentale massa-velocità-temperatura:**

$$m \langle v_x^2 \rangle = k_B T$$

→ **Sostituzione nell'equazione PV:**

$$PV = Nm \langle v_x^2 \rangle = N \frac{k_B T}{m} m = N k_B T$$

→ **Passaggio alle moli (n):** Esprimendo la costante di Boltzmann $k_B = \frac{R}{N_{mo_A}}$ e il

$$\text{numero di moli } n = \frac{N}{N_{mo_A}}:$$

$$PV = N \frac{R}{N_{mo_A}} T = nRT$$

$$PV = nRT$$

Livello Microscopico (Meccanica)

Urti Molecolari & $m = k_B T$

Statistica & N_A

Livello Macroscopico (Termodinamica)

$$PV = nRT$$

Sintesi del passaggio dalla meccanica molecolare all'equazione di stato termodinamica.